Introduction aux espaces perfectoïdes

Dorian Berger
Séminaire des Jeunes Chercheurs du LMNO

2 octobre 2019

Introduction

Dans les années 60, John Tate introduit la géométrie rigide. Son but est de développer un analogue arithmétique de la géométrie complexe : la géométrie analytique p-adique. Depuis, plusieurs versions de tels espaces ont été découvertes, comme les espaces adiques de Huber ou encore les espaces de Berkovich.

Dans sa thèse de doctorat publiée en 2012, Peter Scholze introduit une catégorie particulière de ces espaces analytiques : les espaces perfectoïdes. Ils sont définis comme des espaces adiques particuliers et leur première propriété fondamentale est de pouvoir basculer d'un espace en caractéristique nulle à un espace en caractéristique p tout en conservant les propriétés géométriques. Depuis, la théorie de Scholze a eu de très nombreuses applications et a inspiré la découverte de plusieurs autres notions : diamants, prismes, etc. Ces travaux ont valu à Scholze d'obtenir une médaille Fields au cours du congrès international de 2018.

Dans cet exposé, on commencera par introduire quelques topologies usuelles sur des anneaux afin de donner les bases de la théorie des espaces adiques. On verra ensuite comment définir un espace perfectoïde ainsi que son basculé.

Table des matières

Chapitre 1

Anneaux topologiques

On commence par expliquer quelques notions sur les anneaux topologiques avant d'introduire les topologies adiques, fondamentales en théorie des nombres.

Définition 1.1. *Sur un anneau, une* topologie d'anneau *est une topologie telle que l'addition, l'application opposée et la multiplication soient continues. Un anneau muni d'une topologie d'anneaux est un* anneau topologique*.*

Exemple 1.2. *Les anneaux suivants sont topologiques :*
- *Un anneau muni de la topologie discrète ou de la topologie grossière*
- *Un anneau muni d'une semi-norme multiplicative (une algèbre normée par exemple)*

Remarque. *Un morphisme de la catégorie des anneaux topologiques est un morphisme d'anneaux continu.*

Définition 1.3. *Si R est un anneau commutatif et $I \subset R$ un idéal de type fini, il existe une unique topologie d'anneaux sur R telle que $\{I^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ forme un système fondamental de voisinages de $0 \in R$. On l'appelle la* topologie I-adique *et on dit alors que R est un* anneau adique d'idéal de définition I*.*

Exemple 1.4. *Les anneaux suivants sont adiques :*
- *Un anneau commutatif muni de la topologie 0-adique (i.e. la topologie discrète)*
- *Un anneau commutatif muni de la topologie 1-adique (i.e. la topologie grossière)*
- *$\mathbb{Z}$ muni de la topologie p-adique avec $p \in \mathbb{Z}$ premier*

Définition 1.5. *Un anneau commutatif topologique est dit* de Huber *(ou parfois* f-adique*) si il possède un sous-anneau ouvert adique (appelé anneau de définition).*

Exemple 1.6. *Les anneaux suivants sont de Huber :*

- *Un anneau commutatif adique*
- *La semi-norme d'un anneau adique s'étant de manière unique sur son localisé en une partie régulière (ne contenant pas de diviseur de 0), en faisant un anneau de Huber*
- *En particulier, $\mathbb{Q}$ muni de la topologie p-adique induite par celle de $\mathbb{Z}$*

Remarque. *La catégorie des anneaux de Huber forme une sous-catégorie pleine de celle des anneaux topologiques.*

Proposition 1.7. *La topologie d'un anneau de Huber est issue d'une semi-norme* ultramétrique*. C'est-à-dire : pour tout $a, b \in R, |a+b| \leq \max(|a|, |b|)$.*

Remarque. *Suite à cette proposition, on peut maintenant parler des propriétés métriques d'un anneau de Huber (borné, complet, etc.)*

Proposition 1.8. *Le complété $\widehat{R}$ d'un anneau adique (resp. de Huber) R est un anneau adique (resp. de Huber).*

Exemple 1.9. *Le complété de $\mathbb{Z}$ pour la topologie p-adique est l'*anneau des entiers p-adiques $\mathbb{Z}_p$*. De même, le complété de $\mathbb{Q}$ pour la topologie p-adique est le* corps des nombres p-adiques $\mathbb{Q}_p$*.*

Définition 1.10. *Dans un anneau topologique commutatif R, un élément $\varpi \in R$ tel que pour tout voisinage U de $0 \in R$, il existe un voisinage V de 0 tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varpi^n V \subset U$ est dit* borné en puissances.
Un élément $\varpi \in R$ vérifiant $\varpi^n \to 0$ est dit topologiquement nilpotent.
Un élément topologiquement nilpotent inversible est appelé une pseudo-uniformisante.

Notation. *Dans la suite de l'exposé, si R est un anneau topologique commutatif, R° désigne le sous-anneau des éléments bornés en puissances.*

Définition 1.11. *Un* anneau de Tate *est un anneau de Huber possédant une pseudo-uniformisante.*

Exemple 1.12. *Un anneau adique est un anneau de Tate étant son propre anneau de définition si et seulement si sa topologie est grossière (dans ce cas, tout élément est une pseudo-uniformisante).*
Le corps $\mathbb{Q}$ muni de la topologie p-adique est un anneau de Tate de pseudo-uniformisante p.
Soit A un anneau commutatif et $\pi \in A$ qui n'est pas un diviseur de 0. Si on munit A de la topologie π-adique, π est topologiquement nilpotent. C'est

donc une pseudo-uniformisante de $A[1/\pi]$, qui est un anneau de Tate.
En particulier, le corps des nombres p-adiques $\mathbb{Q}_p = \mathbb{Z}_p[1/p]$ est un anneau de Tate.

Remarque. *Le complété d'un anneau de Tate est encore un anneau de Tate.*

Définition 1.13. *R est dit* uniforme *si R° est borné.*

Définition 1.14. *Un sous-anneau ouvert et intégralement fermé $R^+ \subset R^\circ$ est appelé* anneau d'éléments entiers de R. *Si R est un anneau de Huber (resp. de Tate), un couple (R, R^+) est une* paire de Huber *(resp. de Tate).*

Remarque. *Un anneau d'éléments entiers de R contient toutes les pseudo-uniformisantes de R.*

Exemple 1.15. *Soit A un anneau commutatif et $\pi \in A$ qui n'est pas un diviseur de 0. Si on munit A de la topologie π-adique, on a $A = A[1/\pi]^\circ$ et $(A[1/\pi], A)$ est donc une paire de Tate. En particulier, $(\mathbb{Q}_p, \mathbb{Z}_p)$ est une paire de Tate.*

Chapitre 2

Valuations et spectre adique

On définit ici les espaces adiques "affines", qui sont les briques élémentaires de la théorie.

Définition 2.1. *Si R est un anneau commutatif, une* valuation *sur R est une application $v : R \to G \cup \{+\infty\}$ où G est un groupe abélien (additif) totalement ordonné telle que $v(1) = 0$, $v(0) = +\infty$, $v(f+g) \geq \min\{v(f), v(g)\}$ et $v(fg) = v(f) + v(g)$ pour tout $f, g \in R$.*
Si $v : R \to G \cup \{+\infty\}$ et $v' : R \to G' \cup \{+\infty\}$ sont deux valuations sur R, on dit qu'elles sont équivalentes *si il existe des morphismes injectifs de groupes ordonnés $\phi : G \hookrightarrow H$ et $\psi : G' \hookrightarrow H$ tels que $\phi \circ v = \psi \circ v'$.*

Remarque. *Cette définition induit bien une relation d'équivalence sur l'ensemble des valuations sur un anneau.*

Définition 2.2. *Si v est une valuation sur R, la topologie d'anneau engendrée par les ensembles $\{f \in R \mid v(f) \leq g\}$ avec $g \in G$ est appelée* topologie définie par *v.*

Définition 2.3. *Si R est un anneau topologique et v est une valuation sur R, on dit que v est* continue *si la topologie de R est plus fine que la topologie définie par v.*

Définition 2.4. *Le* spectre adique *d'une paire de Huber (R, R^+) est l'ensemble des classes d'équivalence de valuations* continues *sur R et* positives *sur R^+. On le note $\mathrm{Spa}(R, R^+)$.*

Remarque. *On notera $\mathrm{Spa}(R)$ si R^+ est nul.*

Définition 2.5. *Si (R, R^+) est une paire de Huber et $f, g \in R$, l'ensemble $\{v \in \mathrm{Spa}(R, R^+) \mid v(f) \geq v(g) \neq +\infty\}$ est nommé* domaine rationnel élémentaire. *Un* domaine rationnel *est une intersection finie de domaines rationnels élémentaires. Par défaut, on considère que la topologie de $\mathrm{Spa}(R, R^+)$ est celle engendrée par les domaines rationnels élémentaires.*

Remarque. *Si la topologie de R est discrète, R^+ est simplement un anneau intégralement fermé dans R et* $\mathrm{Spa}(R, R^+)$ *est un espace spectral et peut donc être vu comme un schéma.*

Exemple 2.6. *Si $\mathbb{Q}$ est muni de la topologie discrète, on a* $\mathrm{Spa}(\mathbb{Q}) \cong \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$*. On a aussi* $\mathrm{Spa}(\mathbb{Q}_p, \mathbb{Z}_p) = \{v_p\}$.

Chapitre 3

Espaces adiques

On va maintenant expliquer comment recoller les espaces "affines" $\mathrm{Spa}(R, R^+)$ afin de donner le cadre géométrique général de l'exposé. On aura besoin pour cela de quelques notions de géométrie algébrique.

Définition 3.1. *Un* préfaisceau *sur un espace topologique X est un foncteur contravariant de la catégorie* $\mathrm{Ouv}(X)$ *des ouverts de X avec pour morphismes les inclusions dans la catégorie des ensembles* Set*.*
Autrement dit, un préfaisceau F sur X associe à chaque ouvert $U \subset X$ un ensemble $F(U)$ (vu comme l'ensemble des "bonnes" fonctions sur U) et à chaque inclusion d'ouverts $V \subset U$ une application (de restriction) $F(U) \to F(V)$.
Un morphisme Φ *entre deux préfaisceaux F et F' sur X associe, à chaque inclusion $V \subset U$, deux applications $\Phi(U) : F(U) \to F'(U)$ et $\Phi(V) : F(V) \to F'(V)$ de sorte que $|_V \circ \Phi(U) = \Phi(V) \circ |_V$.*

Remarque. *On parlera de préfaisceaux de groupes (resp. d'anneaux, etc...) si on remplace dans la définition les ensembles par des groupes (resp. anneaux, etc...) et les applications par des morphismes de groupes (resp. morphismes d'anneaux, etc...).*

Définition 3.2. *Un préfaisceau F sur un espace X est un* faisceau *si il vérifie la propriété de recollement suivante : pour tout ouvert $U \subset X$, pour tout recouvrement $\{U_i\}$ de U, et toute famille d'éléments $f_i \in F(U_i)$ telle que $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$ pour tout i, j, on dispose d'un élément $f \in F(U)$ vérifiant $f|_{U_i} = f_i$ pour tout i.*

Exemple 3.3. *Le préfaisceau $U \mapsto B(U, \mathbb{R})$ qui associe à un ouvert U l'ensemble des fonctions bornées à valeur dans $\mathbb{R}$ n'est généralement pas un faisceau. Par contre, le préfaisceau $U \mapsto C(U, \mathbb{R})$ qui associe à un ouvert U*

l'ensemble des fonctions continues à valeur dans $\mathbb{R}$ est un faisceau. La différence est que le fait d'être borné est une propriété globale lorsque le fait d'être continu est une propriété locale.

Définition 3.4. *Si X et Y sont des espaces topologiques, $u : X \to Y$ est une application continue et F est un faisceau sur X, on définit l'*image directe *u_*F de F par u comme le préfaisceau $U \subset Y \mapsto F(u^{-1}(U))$.*

Proposition 3.5. *L'image directe d'un faisceau par une application continue est un faisceau.*

Définition 3.6. *Un* espace topologiquement annelé valué *est un espace topologique X muni d'un faisceau d'anneaux topologiques valués O_X. Un morphisme entre deux espaces X, Y de ce type est formé d'une application continue $u : X \to Y$ et d'un morphisme de faisceaux d'anneaux topologiques valués $u^\sharp : O_Y \to u_*O_X$.*

Définition 3.7. *Si (R, R^+) est une paire de Huber, on note le préfaisceau*

$$O_{\mathrm{Spa}(R,R^+)} : U \mapsto \varprojlim_{R(f_1,...,f_r/g)\subset U} \widehat{R[1/g]}$$

où $(f_1, ..., f_r)$ engendre un idéal ouvert de R et $R(f_1, ..., f_r/g)$ désigne un domaine rationnel de $\mathrm{Spa}(R, R^+)$.

Remarque. *Ce préfaisceau n'est pas toujours un faisceau. Mais c'est le cas si R est discret par exemple.*

Définition 3.8. *Un* espace affinoïde adique *(resp.* espace affinoïde adique analytique*) est un espace topologiquement annelé valué qui est isomorphe à* $(\mathrm{Spa}(R, R^+), O_{\mathrm{Spa}(R,R^+)})$ *où (R, R^+) est une paire de Huber (resp. paire de Tate).*

Remarque. *La définition nécessite en particulier que* $(\mathrm{Spa}(R, R^+), O_{\mathrm{Spa}(R,R^+)})$ *soit un espace topologiquement annelé valué, c'est-à-dire que $O_{\mathrm{Spa}(R,R^+)}$ soit un faisceau.*

Définition 3.9. *Un* espace adique *(resp. un* espace adique analytique*) est un espace topologiquement annelé valué qui admet un recouvrement par des espaces affinoïdes adiques (resp. par des espaces affinoïdes adiques analytiques).*

Chapitre 4

Espaces perfectoïdes

On peut à présent définir la notion d'anneau et d'espace perfectoïdes et présenter le basculement.

Soit p un nombre premier.

Définition 4.1. *Si R est un anneau et si I et J sont des idéaux contenant p et tels que $I^p \subset J$, on note $\Phi : R/I \to R/J$ le* morphisme de Frobenius *$x \mapsto x^p$.*

Définition 4.2. *Un anneau de Tate R est dit* perfectoïde *s'il est complet, uniforme et s'il existe une pseudo-uniformisante $\varpi \in R$ vérifiant $\varpi^p \mid p$ dans R° et telle que $\Phi : R^\circ/\varpi \to R^\circ/\varpi^p$ soit un isomorphisme.*

Proposition 4.3. *Soit R un anneau de Tate complet et uniforme dont une pseudo-uniformisante $\varpi \in R$ vérifie $\varpi^p \mid p$ dans R°. Alors R est perfectoïde si et seulement si $\Phi : R^\circ/p \to R^\circ/p$ est surjectif.*

Remarque. *En particulier, le fait d'être perfectoïde est indépendant du choix de la pseudo-uniformisante ϖ.*

Exemple 4.4. *Le corps $\mathbb{Q}_p$ est un anneau de Tate complet et uniforme. De plus, comme $\mathbb{Z}_p/p = \mathbb{F}_p$, le morphisme $\Phi : \mathbb{Z}_p/p \to \mathbb{Z}_p/p$ est surjectif. Pour autant, $\mathbb{Q}_p$ n'est pas perfectoïde. En effet, p ne possède pas de racine dans $\mathbb{Q}_p$. En particulier, on ne peut trouver de pseudo-uniformisante ϖ vérifiant $\varpi^p \mid p$ dans $\mathbb{Z}_p$. L'extension cyclotomique $\mathbb{Q}_p(p^{1/p^\infty})$ n'est pas complète mais son complété $\mathbb{Q}_p^{cycl}$ est perfectoïde.*
De la même façon, $\mathbb{F}_p((t))$, muni de la topologie t-adique, n'est pas perfectoïde. Son extension cyclotomique $\mathbb{F}_p((t))(t^{1/p^\infty})$ n'est pas complète mais son complété $\mathbb{F}_p((t^{1/p^\infty}))$ est perfectoïde.

Le premier intérêt de la notion de perfectoïde est le processus de basculement. C'est ce qu'on va voir maintenant.

Définition 4.5. *Soit R un anneau de Tate perfectoïde. On définit le* basculé *de R comme la limite $R^\flat = \varprojlim_{x \mapsto x^p} R$. La projection sur la première coordonnée $R^\flat \to R$ sera notée $f \mapsto f^\sharp$.*

Proposition 4.6. *Si $(x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, ...)$ et $(y^{(0)}, y^{(1)}, y^{(2)}, ...)$ sont des éléments de $R^\flat$, $\lim_{n\to\infty} (x^{(i+n)} + y^{(i+n)})^{p^n}$ existe pour tout i et sera notée $z^{(i)}$. Muni de l'addition donnée par $(x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, ...) + (y^{(0)}, y^{(1)}, y^{(2)}, ...) = (z^{(0)}, z^{(1)}, z^{(2)}, ...)$, de la multiplication terme à terme et de la topologie de la limite projective, $R^\flat$ est une $\mathbb{F}_p$-algèbre perfectoïde.*

Exemple 4.7. *On a $(\mathbb{Q}_p^{cycl})^\flat = \mathbb{F}_p((t^{1/p^\infty}))$. En effet, on a bien $(\mathbb{Q}_p^{cycl})^\circ/p = \mathbb{Z}_p[p^{1/p^\infty}]/p \cong \mathbb{F}_p[t^{1/p^\infty}]/t = \mathbb{F}_p((t^{1/p^\infty}))^\circ/t$ où les éléments du type p^{1/p^n} sont envoyés sur t^{1/p^n}. Cet isomorphisme s'étend en une application $\mathbb{F}_p((t^{1/p^\infty})) \to \mathbb{Q}_p^{cycl}$ qui envoie t sur p et qui sera noté $x \mapsto x^\sharp$. Alors l'application $\mathbb{F}_p((t^{1/p^\infty})) \to (\mathbb{Q}_p^{cycl})^\flat$ définie par $x \mapsto (x^\sharp, (x^{1/p})^\sharp, ...)$ est un isomorphisme.*

Proposition 4.8. *Il existe une pseudo-uniformisante $\varpi \in R$ vérifiant $\varpi^p \mid p$ dans R° et admettant une suite de racines p-ièmes ϖ^{1/p^n} engendrant une pseudo-uniformisante $\varpi^\flat = (\varpi, \varpi^{1/p}, \varpi^{1/p^2}, ...) \in R^\flat$. On a de plus : $R^\flat = R^{\flat\circ}[1/\varpi^\flat]$.*

Lemme 4.9. *L'ensemble des anneaux d'éléments entiers $R^+ \subset R$ est en bijection avec l'ensemble des anneaux d'éléments entiers $R^{\flat+} \subset R^\flat$ via $R^{\flat+} = \varprojlim_{x \mapsto x^p} R^+$. De plus, on a $R^{\flat+}/\varpi^\flat \cong R^+/\varpi$.*

Théorème 4.10. *Soit R un anneau de Tate perfectoïde de basculé $R^\flat$ et $R^+ \subset R$ un anneau d'éléments entiers de basculé $R^{\flat+} \subset R^\flat$. Si x est un élément de $\mathrm{Spa}(R, R^+)$, on définit $x^\flat \in \mathrm{Spa}(R^\flat, R^{\flat+})$ par $x^\flat(f) = x(f^\sharp)$ pour tout $f \in R^\flat$. Alors l'application :*

$$\begin{aligned} \mathrm{Spa}(R, R^+) &\to \mathrm{Spa}(R^\flat, R^{\flat+}) \\ x &\mapsto x^\flat \end{aligned}$$

est un homéomorphisme préservant les domaines rationnels.

On peut à présent étudier les perfectoïdes d'un point de vue géométrique.

Théorème 4.11. *Soit R un anneau de Tate perfectoïde, $R^+ \subset R$ un anneau d'éléments entiers et $X = \mathrm{Spa}(R, R^+)$. Alors O_X est un faisceau. De plus, si $U \subset X$ est un domaine rationnel, alors $O_X(U)$ est perfectoïde de basculé $O_{X^\flat}(U^\flat)$ où $X^\flat = \mathrm{Spa}(R^\flat, R^{\flat+})$ et $U^\flat \subset X^\flat$ est l'image de U par l'homéomorphisme $x \mapsto x^\flat$.*

Définition 4.12. *Un* espace perfectoïde affinoïde *est un espace adique qui est isomorphe à* $(\mathrm{Spa}(R,R^+), O_{\mathrm{Spa}(R,R^+)})$ *où* R *est perfectoïde. Un* espace perfectoïde *est un espace adique qui admet un recouvrement par des espaces perfectoïdes affinoïdes.*

Remarque. *Si* X *est un espace perfectoïde, on donne un sens à* $X^\flat$ *en recollant les basculés des ouverts affinoïdes de* X*.*

Théorème 4.13. *Si* X *est un espace perfectoïde, le foncteur* $Y \mapsto Y^\flat$ *induit une équivalence de catégories entre les espaces perfectoïdes sur* X *et ceux sur* $X^\flat$*.*